La descomposició del $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$, fa pensar que algún d'aquests dos factors deurà trobar-se en el numerador, i efectivament, aplicant fins a quatre vegades la llei de quocients, se troba que'l polinomi de dins del parèntesis del numerador se descompòn respectivament en

$$(n^2 \pm 1)^4 (n^8 \pm 28n^6 + 70n^4 \pm 28n^2 + 1),$$

de manera que en definitiva

$$u = \frac{2(n^8 \pm 28n^6 + 70n^4 \pm 28n^2 + 1)}{(n^2 \pm 1)^4},$$

corresponent-se els signes. Separant-los i dividint per 2, tindrem

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{2} &= \frac{n^8 + 28n^6 + 70n^4 + 28n^2 + 1}{(n^2-1)^4} \\ \frac{u_2}{2} &= \frac{n^8 - 28n^6 + 70n^4 - 28n^2 + 1}{(n^2+1)^4} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ara, la fórmula de transformació (4) de les equacions recíproques, dóna

$$x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}.$$

Partint del primer valor de u (6), tindrem

$$\frac{u_1^2}{4} - 1 = \frac{1}{(n^2-1)^8}\left(64n^{14} + 896n^{12} + 4032n^{10} + 6400n^8 + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{64n^2}{(n^2-1)^8}\left(n^6 + 7n^4 + 7n^2 + 1\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{u_1^2}{4} - 1} = \frac{8n(n^6 + 7n^4 + 7n^2 + 1)}{(n^2-1)^4};$$

i per tant

$$x = \frac{n^8 + 28n^6 + 70n^4 + 28n^2 + 1}{(n^2-1)^4} \pm \frac{8(n^7 + 7n^5 + 7n^3 + n)}{(n^2-1)^4} = \frac{(n \pm 1)^8}{(n-1)^4 (n+1)^4},$$

que separades i simplificades, són les dues arrels

$$x = \frac{(n+1)^4}{(n-1)^4}, \quad x = \frac{(n-1)^4}{(n+1)^4}.$$

Així mateix, partint de l'altre valor de u (6), tindrem,

$$\frac{u_2^2}{4}-1=\frac{1}{(n^2+1)^8}\left(-64n^{14}+896n^{12}-4032n^{10}+6400n^8-\ldots\ldots\right)$$

$$=\frac{-64n^2}{(n^2+1)^8}\left(n^6-7n^4+7n^2-1\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{u_2^2}{4}-1}=\frac{8ni(n^6-7n^4+7n^2-1)}{(n^2+1)^4};$$

i per tant

$$x=\frac{n^8-28n^6+70n^4-28n^2+1}{(n^2+1)^4}\pm\frac{8i(n^7-7n^5+7n^3-n)}{(n^2+1)^4}=\frac{(ni\pm1)^8}{(ni-1)^4(ni+1)^4}$$

que separades i simplificades, són les altres dues arrels

$$x=\frac{(ni+1)^4}{(ni-1)^4} \qquad x=\frac{(ni-1)^4}{(ni+1)^4}.$$

Essent, n, $-n$, ni, $-ni$, les quatre arrels quartes de p, aquests quatre valors de x que acabem de trobar, poden expressar-se tots plegats simbòlicament per la fórmula

$$\left(\frac{\sqrt[4]{((p))}+1}{\sqrt[4]{((p))}-1}\right)^4,$$

suposant que's corresponguin els valors iguals del radical.

I és fàcil de refer l'equació que ha de tenir aquestes quatre arrels. Perquè siguin més senzills els càlculs, escalonem-los de la següent manera.

Primer formarem l'equació que tingui per arrel $z=\dfrac{\sqrt[4]{((p))}+1}{\sqrt[4]{((p))}-1}$, val a dir

$$\frac{n+1}{n-1}, \quad \frac{n-1}{n+1}, \quad \frac{ni+1}{ni-2}, \quad \frac{ni-1}{ni+1}.$$

Aquesta equació serà de la forma

$$z^4+az^3+bz^2\pm az\pm1=0,$$

corresponent-se els signes, car té de ser equació recíproca. La suma de les arrels se troba fàcilment així:

$$\frac{n+1}{n-1}+\frac{n-1}{n+1}=2\,\frac{n^2+1}{n^2+1}$$

i per tant

$$\frac{ni+1}{ni-1}+\frac{ni-1}{ni+1}=2\,\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

i finalment

$$-a=2\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}+\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)=4\,\frac{n^4+1}{n^4-1}=4\,\frac{p+1}{p+1}.$$

La suma dels productes binaris també es troba fàcilment, car dos d'ells

$$\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n-1}=1,$$

$$\frac{ni-1}{ni+1}\cdot\frac{ni+1}{ni-1}=1$$

i els altres quatre són els termes del producte

$$\left(\frac{n+1}{n-1}+\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{ni+1}{ni-1}+\frac{ni-1}{ni+1}\right)=2\,\frac{n^2+1}{n^2-1}\times 2\,\frac{n^2-1}{n^2+1}=4,$$

de manera que $b=6$.

Finalment com que'l producte de les quatre arrels és 1, del signe d'ambigüetat s'ha de pendre el $+$, i per tant l'equació buscada és

$$z^4+4\,\frac{p+1}{p-1}z^3+6z^2+4\,\frac{p+1}{p-1}z+1=0$$

o bé

$$(p-1)z^4+4(p+1)z^3+6(p-1)z^2+4(p+1)z+(p-1)=0.$$

Ara, transformant aquesta equació en $y=z^2$, trobarem

$$\begin{array}{r|l|l}
(p-1)^2y^4+12(p-1)^2 & y^3\quad +2(p-1)^2 & y^2\quad +\ldots\ldots=0,\\
-16(p+1)^2 & \quad\;\; -32(p+1)^2 & \\
 & \quad\;\; +36(p-1)^2 &
\end{array}$$

o sigui

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
p^2 & y^4\quad -4p^2 & y^3\quad +6p^2 & y^2\quad -4p^2 & y\quad +p^2=0\\
-2p & -56p & -140p & -56p & -2p\\
+1 & -4 & +6 & -4 & +1
\end{array}$$

que també es pot escriure

$$(p-1)^2y^4-4(p^2+14p+1)y^3+2(3p^2-70p+3)y^2+\ldots\ldots=0.$$

I si ara repetim la transformació, passant a la incògnita $x=y^2=z^4$, trobarem

$$(p-1)^4x^4 \begin{array}{r} +4(p-1)^2(3p^2-70p+3) \\ -16(p^2+14p+1)^2 \\ \end{array}\Bigg|\, x^3 \begin{array}{r} +2(p-1)^4 \\ -32(p^2+14p+1)^2 \\ +4(3p^2-70p+3)^2 \end{array}\Bigg|\, x^2+\ldots\ldots=0$$

que fets els càlculs, resulta ésser, com havía de resultar, la mateixa equació (3) del començament, car se troba

$$4(p-1)^2(3p^2-70p+3)-16(p^2+14p+1)^2=$$
$$=-4p^4-752p^3-2584p^2-752p-4,$$

$$2(p-1)^4-32(p^2+14p+1)^2+4(3p^3-70p+3)^2=$$
$$=6p^4-2584p^3+13348p^2-2584p+6.$$

JOSEP RIUS I CASAS

Catedràtic a l'Universitat de Saragossa, 15 *abril* 1916.